Общие методы решения неравенств (задание 15 ЕГЭ профиль)

Сармина Наталья Сергеевна,
учитель математики
МАОУ «Пономаревской СОШ»

с.Пономаревка, 2023

Статистика выполнения 2 части ЕГЭ (профиль) в 2023 году

	Задача 12, Тригонометрия	Задача 13, Стереометрия	Задача 14, Неравенства	Задача 15, Экономика	Задача 16, Планиметрия	Задача 17, Параметры	Задача 18, Теория чисел
0 баллов	30%	11%	58%	40%	14%	17%	33%
1 балл	14%	0%	1%	5%	6%	11%	10%
2 балла	48%	0%	17%	10%	0%	0%	0%
3 балла		0%			0%	0%	0%
4 балла						2%	0%
НЕ брались за задачу	8%	89%	24%	45%	80%	70%	57%

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обосновано получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Виды неравенств

- Рациональные неравенства
- Иррациональные неравенства
- Показательные неравенства
- Логарифмические неравенства
- Неравенства содержащие модуль

Решение дробно-рациональных неравенств

При решении дробно-рациональных неравенств вида:

$\frac{P_{n1}(x)}{Q_{m1}(x)} >,< \frac{P_{n2}(x)}{Q_{m2}(x)}$ следует помнить, что если знак общего знаменателя дробей неизвестен, то не имеем права на него умножать обе части данного неравенства.

Надо перенести $\frac{P_{n2}(x)}{Q_{m2}(x)}$ в левую часть неравенства и перевести слагаемые к общему знаменателю.

Полученное неравенство: $\frac{P_{n_1}(x) \times Q_{m_2}(x) - P_{n_2}(x) \times Q_{m_1}(x)}{Q_{m_1}(x) \times Q_{m_2}(x)} >, < 0$

следует решать методом интервалов.

Решение неравенств методом интервалов

Строгие рациональные неравенства решаются переходом к равносильному неравенству.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) < 0$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) > 0$$

Не строгие рациональные неравенства решаются переходом к системе, в которой нужно исключить значения переменной, при которой знаменатель обращается в ноль.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \leq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

Рациональные неравенства

https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=530457

$$\frac{x^4-2x^3+x^2}{x^2+x-2}-\frac{2x^3+x^2+x-1}{x+2}\leqslant 1$$

Решение. Запишем исходное неравенство в виде:

$$\frac{x^4-2x^3+x^2}{x^2+x-2}-\frac{2x^3+x^2+x-1}{x+2}\leqslant 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2(x-1)^2}{(x+2)(x-1)}-\frac{2x^3+x^2+2x+1}{x+2}\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-x^3-2x^2-2x-1}{x+2}\leqslant 0,\\ x-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x+1)(x^2+x+1)}{x+2}\geqslant 0,\\ x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2,\\ -1\leqslant x<1,\\ x>1.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -2)\cup[-1;1)\cup(1;\ +\infty)$.

https://www.mathm.ru/zad/ege/zad15eget.html#tema1

Решить неравенство

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-6}\cdot\left(\frac{2x^2-x-1}{x^2-x}\right)^{-1}\geq\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}-2{,}5.$$

Решите неравенство

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-6}\cdot\left(\frac{2x^2-x-1}{x^2-x}\right)^{-1}\geq\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}-2{,}5.$$

Решение.

Разложим числитель и знаменатель каждой дроби на множители:

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+2)}\cdot\left(\frac{2(x-1)(x+0{,}5)}{x(x-1)}\right)^{-1}\geq\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}-2{,}5.$$

Упрощая, получаем

$$\frac{x-2}{x+2}\cdot\frac{x}{2x+1}\geq\frac{x+2}{x-1}-2{,}5.$$

Переносим все в левую часть и приводим к общему знаменателю:

$$\frac{x(x-2)(x-1)-(x+2)^2(2x+1)-2{,}5(x+2)(2x+1)(x-1)}{(x+2)(2x+1)(x-1)}\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{4x^3-4{,}5x^2-17{,}5x-9}{(x+2)(2x+1)(x-1)}\geq 0.$$

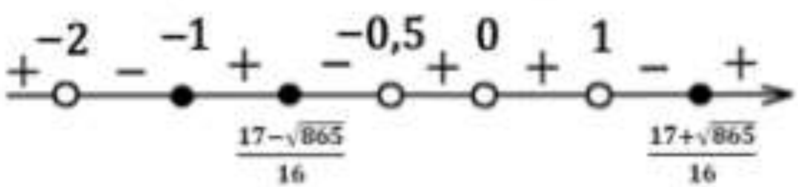
Разложим числитель на множители: мы видим корень $x=-1$, разделим числитель на $x+1$, находим

$4x^3-4{,}5x^2-17{,}5x-9=(x+1)(4x^2-8{,}5x-9)$. Получим неравенство $\frac{(x+1)(4x^2-8{,}5x-9)}{(x+2)(2x+1)(x-1)}\geq 0.$

Решаем методом интервалов.

Находим нули числителя: $x_1=-1$; $x_2=\frac{17+\sqrt{865}}{16}$; $x_3=\frac{17-\sqrt{865}}{16}$. Находим нули знаменателя: $x_4=-2$; $x_5=-0{,}5$; $x_6=1$.

Отмечаем нули на числовой оси и расставляем знаки с учетом ОДЗ:



Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup\left[-1;\frac{17-\sqrt{865}}{16}\right]\cup(-0{,}5;0)\cup(0;1)\cup\left[\frac{17+\sqrt{865}}{16};3\right)\cup(3;+\infty)$.

ОДЗ:

$$\begin{cases}x^2-x-6\neq 0;\\2x^2-x-1\neq 0;\\x^2-x\neq 0;\\x^2-3x+2\neq 0;\end{cases}$$

$x\in(-\infty;-2)\cup(-2;-0{,}5)\cup(-0{,}5;0)$
$\cup(0;1)\cup(1;2)\cup(2;3)$
$\cup(3;+\infty)$

Алгоритм решения иррациональных неравенств:

1. Введение иррациональной функции; нахождение области определения функции.
2. Вычисление нулей функции.
3. На координатной прямой:
   - отмечаем нули функции, принадлежащие области определения;
   - определяем знак функции на каждом промежутке;
   - с учетом знака неравенства выписываем ответ.

Подходы к решению иррациональных неравенств

Исходное неравенство	Равносильное неравенство или система
$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$	$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array}\right.$

Неравенства, содержащие иррациональные выражения

Приведем некоторые стандартные схемы для решения иррациональных неравенств, в которых используют возведение в натуральную степень обеих частей неравенства

- $$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$
- $$\sqrt[2n]{f(x)} \geq \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$
- $$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$

Решить неравенство

$$\left(2+\frac{3}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-4}{1-\sqrt{3-x}}\right) \geq 5\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-4}{1-\sqrt{3-x}}\right)$$

Решите неравенство

$$\left(2+\frac{3}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-4}{1-\sqrt{3-x}}\right) \geq 5\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-4}{1-\sqrt{3-x}}\right).$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-8x+16 \geq 0; \\ 3-x \geq 0; \\ x \neq 0; \\ 1-\sqrt{3-x} \neq 0; \end{cases}$$

$x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; 3]$.

Решение.

Перенесем все в левую часть и вынесем за скобку общий множитель $\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-4}{1-\sqrt{3-x}}$, находим:

$$\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-4}{1-\sqrt{3-x}}\right)\left(2+\frac{3}{x}-5\right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-4}{1-\sqrt{3-x}}\right)\left(\frac{3-3x}{x}\right) \geq 0.$$

Решаем методом интервалов. Найдем нули числителя:

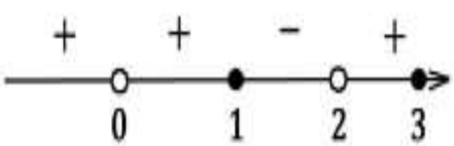
если $\sqrt{x^2-8x+16}-4=0 \Rightarrow \sqrt{x^2-8x+16}=4 \Rightarrow x^2-8x+16=16 \Rightarrow x^2-8x=0$, откуда $x=0$ и $x=8$;

если $3-3x=0$, то $x=1$.

Найдем нули знаменателя:

если $1-\sqrt{3-x}=0 \Rightarrow \sqrt{3-x}=1 \Rightarrow 3-x=1$, откуда $x=2$. Еще ноль знаменателя $x=0$.

Расставляем знаки и находим с учетом ОДЗ:



Получаем ответ.

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1] \cup (2; 3]$.

Решите неравенство

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}}.$$

$$\sqrt{7-x}<\frac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7-x}\cdot\sqrt{x-1}<\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(7-x)<x^3-6x^2+14x-7, \\ x-1\geq 0, \\ 7-x\geq 0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-5x^2+6x>0, \\ 1<x\leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)(x-3)>0, \\ 1<x\leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x<2, \\ 3<x\leq 7. \end{array}\right.$$

Ответ: $(1;\ 2)\cup(3;\ 7]$.

Показательные неравенства

Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{h(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **показательными неравенствами**

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

$a > 1$

$$f(x) > g(x)$$

$0 < a < 1$

$$f(x) < g(x)$$

или

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x)) > 0$$

Решить неравество

$$\frac{7}{9^x-2} \geq \frac{2}{3^x-1}.$$

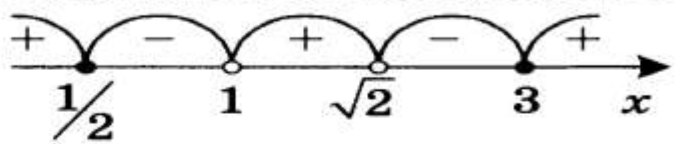
Решение. Пусть $y = 3^x$, $y > 0$. Тогда неравенство примет следующий вид:

$$\frac{7}{y^2-2} \geq \frac{2}{y-1} \Leftrightarrow \frac{2y^2-7y+3}{(y^2-2)(y-1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)(y-3)}{(y-\sqrt{2})(y+\sqrt{2})(y-1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\overset{(т.к.\ y+\sqrt{2}>0)}{\Leftrightarrow} \frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)(y-3)}{(y-\sqrt{2})(y-1)} \leq 0.$$

Решим данное неравенство методом интервалов.



Получим:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq y < 1, \\ \sqrt{2} < y \leq 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq 3^x < 1, \\ \sqrt{2} < 3^x \leq 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 \frac{1}{2} \leq x < 0, \\ \log_3\sqrt{2} < x \leq 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left[\log_3 \frac{1}{2}, 0\right) \cup (\log_3\sqrt{2}, 1]$.

Решить неравенство

$$5 \cdot 9^x - 18 \cdot 15^x + 9 \cdot 25^x > 0.$$

Решение. Разделим обе части исходного неравенства на 25^x. Имеем:

$$5 \cdot 9^x - 18 \cdot 15^x + 9 \cdot 25^x > 0 \Leftrightarrow 5 \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^x - 18 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 9 > 0.$$

Пусть $\left(\frac{3}{5}\right)^x = y$, $y > 0$. Тогда неравенство примет следующий вид:

$$5y^2 - 18y + 9 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y < \frac{3}{5}, \\ y > 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{3}{5}, \\ \left(\frac{3}{5}\right)^x > 3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < \log_{\frac{3}{5}} 3. \end{array}\right.$$

Таким образом, ответом к задаче будет служить $x \in \left(-\infty, \log_{\frac{3}{5}} 3\right) \cup (1, +\infty)$.

Ответ: $x \in \left(-\infty, \log_{\frac{3}{5}} 3\right) \cup (1, +\infty)$.

Решить неравенство

$$\left(1-\frac{2x}{5}\right)^{7+11x-6x^2} \geq 1.$$

Решение. Данное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left(1-\frac{2x}{5}\right)^{7+11x-6x^2} \geq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-\dfrac{2x}{5} \geq 1, \\ 7+11x-6x^2 \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 1-\dfrac{2x}{5} \leq 1, \\ 7+11x-6x^2 \leq 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 0, \\ -\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{7}{3}, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leq x < \dfrac{5}{2}, \\ x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{7}{3}, +\infty\right); \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2} \leq x \leq 0, \\ \dfrac{7}{3} \leq x < \dfrac{5}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{7}{3}, \frac{5}{2}\right).$$

Ответ: $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right] \cup \left[\dfrac{7}{3}, \dfrac{5}{2}\right)$.

(Аналог досрочного ЕГЭ 2023) Решите неравенство

$$\frac{4^x + 2^{x+1} - 36}{2^x - 5} + \frac{4^{x+1} - 2^{x+5} + 4}{2^x - 8} \le 5 \cdot 2^x + 7.$$

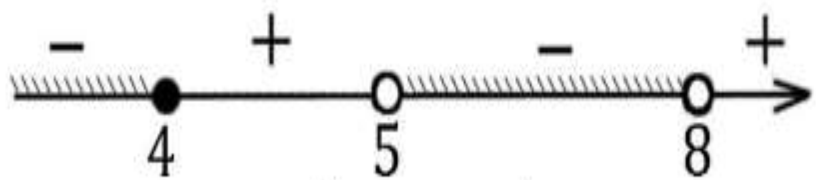
Решение.

Заменим переменную $2^x = t$, получим

$$\frac{t^2 + 2t - 36}{t - 5} + \frac{4t^2 - 32t + 4}{t - 8} \le 5t + 7 \Leftrightarrow \frac{t^2 + 2t - 36}{t - 5} + \frac{4t^2 - 32t + 4}{t - 8} - \frac{5t + 7}{1} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t^2 + 2t - 36)(t - 8) + (4t^2 - 32t + 4)(t - 5) - (5t + 7)(t - 5)(t - 8)}{(t - 5)(t - 8)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{3t - 12}{(t - 5)(t - 8)} \le 0.$$

Решаем методом интервалов.



Получаем $t \in (-\infty; 4] \cup (5; 8)$. Возвращаемся к старой переменной.

$$t \in (-\infty; 4] \Leftrightarrow 2^x \le 4 \Leftrightarrow x \le 2; \quad t \in (5; 8) \Leftrightarrow \begin{cases} t > 5 \\ t < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > 5 \\ 2^x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_2 5 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (\log_2 5; 3).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 2] \cup (\log_2 5; 3)$.

Логарифмические неравенства

Неравенство вида $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ равносильно системе

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

если $a > 1$, и системе

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases}$$

если $a \in (0,1)$.

Задание с реального ЕГЭ 2023 год
(основная волна)

Решить неравенство:

$$\log_{25}\left((x-4)(x^2-2x-8)\right)+1 \geqslant 0,5\log_5(x-4)^2.$$

$$\log_{25}\left((x-4)(x^2-2x-8)\right)+1 \geqslant 0,5\log_5(x-4)^2.$$

Решение

Запишем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases}(x-4)(x^2-2x-8)>0\\(x-4)^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-4)(x-4)(x+2)>0\\x-4\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-4\neq 0\\x>-2\end{cases} \Leftrightarrow x\in(-2;4)\cup(4;+\infty)$$

На ОДЗ преобразуем логарифмы:

$$\log_{25}\left((x-4)(x^2-2x-8)\right)=0,5\log_5\left((x-4)^2(x+2)\right)=0,5\log_5(x-4)^2+0,5\log_5(x+2).$$

Тогда исходное неравенство примет вид:

$$\begin{gathered}0,5\log_5(x-4)^2+0,5\log_5(x+2)+1\geqslant 0,5\log_5(x-4)^2\\0,5\log_5(x+2)\geqslant -1\\\log_5(x+2)\geqslant -2\\\log_5(x+2)\geqslant \log_5 0,04\\x+2\geqslant 0,04\\x\geqslant -1,96.\end{gathered}$$

С учётом ОДЗ получим ответ: $x\in[-1,96;4)\cup(4;+\infty)$.

$$\log_4\left((x-5)(x^2-2x-15)\right)+1 \geq 0,5\log_2(x-5)^2$$

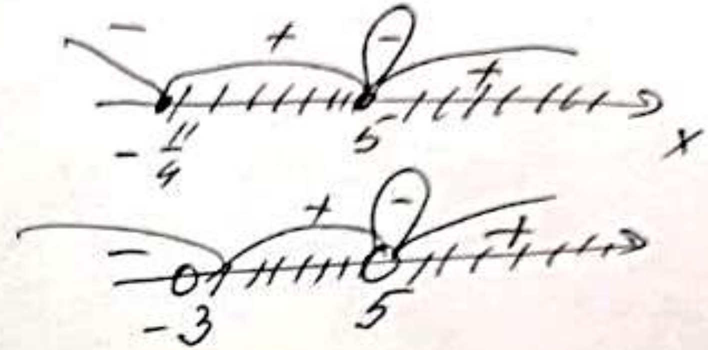
$$\log_4\left((x-5)(x^2-2x-15)\right)+1 \geqslant 0{,}5\log_2(x-5)^2$$

$$0{,}5\left(\log_2(x-5)^2(x+3)+2\right) \geqslant 0{,}5\log_2(x-5)^2$$

$$\log_2(x-5)^2(x+3)\cdot 4 \geqslant \log_2(x-5)^2$$

$$\begin{cases} (x-5)^2(x+3) \geqslant (x-5)^2 \\ (x-5)^2 > 0 \\ (x-5)^2(x+3) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-5)^2(4x+11) \geqslant 0 \\ (x-5)^2(x+3) > 0 \end{cases}$$



Ответ $\left[-\frac{11}{4};5\right)\cup(5;+\infty)$

Аналог ЕГЭ 2023 год (основная волна)

$$\log_8(x-1)^3 \geq \log_2(x^2-1) - 5.$$

(Аналог ЕГЭ 2023 основная волна) Решите неравенство

$$\log_8(x-1)^3 \geq \log_2(x^2-1)-5.$$

Решение.

Преобразуем

$$\log_8(x-1)^3 \geq \log_2(x^2-1)-5 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{3}\log_2(x-1)^3 \geq \log_2(x^2-1)-\log_2 32 \;\Leftrightarrow\; \log_2(x-1) \geq \log_2\frac{(x^2-1)}{32}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x^2-1>0 \\ x-1 \geq \dfrac{x^2-1}{32} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty) \\ x^2-32x+31 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty) \\ x \in [1;31] \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x \in (1;31].$$

Ответ: $x \in (1;31]$.

(Аналог ЕГЭ 2022 основная волна)

Решите неравенство

$$\log_2 x + 2\log_x 2 \geq \frac{3}{(\log_2 x)^3}.$$

ОДЗ

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (0;1) \cup (1;+\infty).$$

Решение.

Замена $\log_2 x = t$, тогда $\log_x 2 = \frac{1}{t}$

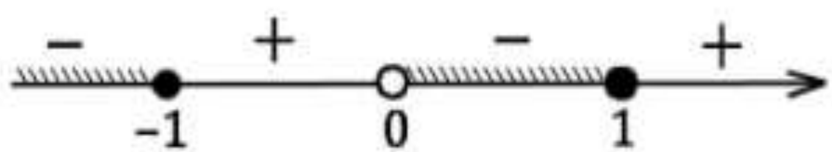
$$t + \frac{2}{t} \geq \frac{3}{t^3} \;\Leftrightarrow\; t + \frac{2}{t} - \frac{3}{t^3} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{t^4 + 2t^2 - 3}{t^3} \geq 0.$$

Для разложения $t^4 + 2t^2 - 3$ на множители сделаем замену $t^2 = a$, получим $a^2 + 2a - 3$. Далее

$$a^2 + 2a - 3 = (a+3)(a-1) = (t^2+3)(t^2-1) = (t^2+3)(t-1)(t+1).$$

Решаем методом интервалов неравенство

$$\frac{(t^2+3)(t-1)(t+1)}{t^3} \geq 0.$$



Получаем $t \in [-1;0) \cup [1;+\infty)$.

Возвращаемся к старой переменной.

$$t \in [-1;0) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t \geq -1 \\ t < 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \log_2 x \geq -1 \\ \log_2 x < 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < 1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x \in \left[\frac{1}{2};1\right),$$

$$t \in [1;+\infty) \;\Leftrightarrow\; t \geq 1 \;\Leftrightarrow\; \log_2 x \geq 1 \;\Leftrightarrow\; x \geq 2 \;\Leftrightarrow\; x \in [2;+\infty).$$

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{2};1\right) \cup [2;+\infty)$.

Неравенства с модулем

Неравенства вида $|f(x)| < g(x)$ и $|f(x)| > g(x)$ можно решать, раскрывая модуль по определению:

$$|f(x)| < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) < g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) < g(x); \end{cases} \end{array} \right.$$

$$|f(x)| > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) > g(x). \end{cases} \end{array} \right.$$

Кроме того, существует и другой способ решения этих неравенств:

$$|f(x)| < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x), \\ -f(x) < g(x); \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x); \end{cases}$$

$$|f(x)| > g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ -f(x) > g(x); \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$$

В частности, неравенство вида $|f(x)| < c$ ($|f(x)| > c$), где $c > 0$, равносильно следующей системе (совокупности):

$$|f(x)| < c \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < c, \\ f(x) > -c; \end{cases} \qquad |f(x)| > c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > c, \\ f(x) < -c. \end{array}\right.$$

Неравенство вида $|f(x)| < |g(x)|$ решается следующим образом:

$$|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x) \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) < 0.$$

Если в уравнении или неравенстве модулей два или больше, мы поступаем следующим образом. Приравниваем все выражения, стоящие под знаком модуля, к нулю и полученные точки в нужном порядке расставляем на числовой прямой. Затем определяем знаки подмодульных выражений на каждом из образовавшихся промежутков и в соответствие с этими знаками раскрываем модули, т.е. данный модуль раскрывается на промежутке без изменения знака, если подмодульное выражение положительно, и с изменением знака, если оно отрицательно. Что касается концов промежутков, то поскольку подмодульное выражение там равно нулю, то модуль можно раскрыть любым из этих двух способов, т.е. общий конец двух промежутков можно включить в любой из них на свой выбор.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$x^2 + 4|x - 3| - 7x + 11 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 3 \ge 0, \\ x^2 + 4(x-3) - 7x + 11 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x - 3 < 0, \\ x^2 - 4(x-3) - 7x + 11 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 3, \\ x^2 - 3x - 1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, \\ x^2 - 11x + 23 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 3, \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, \\ x = \dfrac{11 \pm \sqrt{29}}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}, \\ x = \dfrac{11 - \sqrt{29}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$, $x = \dfrac{11 - \sqrt{29}}{2}$.

Решите неравенство

$$|x^2+3x-4|-x^2+|x+4|<2.$$

Решение.

Решим неравенство методом интервалов. Приравняем выражения, стоящие под модулем, к нулю и получим: если $x^2+3x-4=0$, то $x=1$ и $x=-4$; если $x+4=0$, то $x=-4$.

Эти точки разбивают числовую ось на три промежутка $(-\infty;\ -4)$, $[-4;1]$, $(1;+\infty)$, на каждом из которых подмодульное выражение не меняет знака.

Получаем, что исходное неравенство эквивалентно системе:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-4; \\ x^2+3x-4-x^2-(x+4)<2; \end{cases} \\ \begin{cases} -4\le x\le 1; \\ -(x^2+3x-4)-x^2+(x+4)<2; \end{cases} \\ \begin{cases} x>1; \\ x^2+3x-4-x^2+(x+4)<2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим эти три системы по-отдельности.

Первая система эквивалентна системе $\begin{cases} x<-4; \\ x<5; \end{cases}$ откуда получаем $x<-4$.

Вторая система эквивалентна системе $\begin{cases} -4\le x\le 1; \\ x^2+x-3>0. \end{cases}$ Решая второе неравенство методом интервалов, получаем $x\in[-4;\frac{-1-\sqrt{13}}{2})$, так как $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}>1$.

Третья система эквивалентна системе $\begin{cases} x>1; \\ x<0.5; \end{cases}$ - эта система не имеет решений.

Ответ: $x\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)$.

При подготовке данного материала были использованы следующие источники:

1. ЕГЭ 2019. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Решение уравнений и неравенств/ Ю.В.Садовничий. – М.: Издательство «Экзамен». 2019.-95 с
2. www.znanio.ru
3. https://www.mathm.ru/zad/ege/zad15eget.html#tema0
4. https://shkolkovo.net/catalog
5. https://math-ege.sdamgia.ru/prob-catalog

Спасибо за внимание