**7 класс**

**1** Карлсону подарили пакет с конфетами: шоколадными и карамельками. За первые 10 минут Карлсон съел 20% всех конфет, причем 25% из них составляли карамельки. После этого Карлсон съел еще 3 шоколадные конфеты, и доля карамелек среди съеденных Карлсоном конфет понизилась до 20% . Сколько конфет было в подаренном Карлсону пакете?

**Решение**. Пусть за первые 10 минут Карлсон съел х конфет, тогда шоколадных среди них было 0,75х . Из условия задачи следует, что доля съеденных Карлсоном шоколадных конфет составляет 80% , значит, 0,75х + 3 = 0,8(х+3). Отсюда х=12 , что составляет 20% всех конфет. Следовательно, всего в пакете было 60 конфет. Ответ: 60 конфет.

**2** В доме между любыми двумя комнатами имеется не более одной двери и из каждой комнаты не более одной двери ведет в сад. Всего в доме 12 дверей. Какое наименьшее число комнат может быть в этом доме?

**Решение**. Очевидно, что 4 комнат не хватит. Между любыми двумя комнатами имеется дверь и из каждой комнаты дверь ведет в сад. Получаем, 6 + 4 = 10 дверей. Покажем, что в доме может быть 5 комнат. Так как в доме в каждой комнате имеется дверь, выходящая в сад, и между каждыми двумя соседними комнатами также имеется дверь, то 5 + 7 = 12 дверей. Ответ: 5 комнат.

**3**. Электронные часы показывают время от 00.00.00 до 23.59.59. Сколько времени в течение суток на табло часов горят ровно четыре цифры 3?

**Решение**. Если на табло горят цифры ab.cd.mn, то a $\ne $3, поэтому возможны 5 случаев, когда одна из цифр b, c, d, m, n не равна 3, а остальные равны 3. а) На табло ab.33.33, где b $\ne $3. Таких наборов 21. б) На табло a3.c3.33, где c $\ne $3. Здесь a может принимать любое из трех значений 0, 1 или 2, с – любое из пяти значений 0, 1, 2, 4 или 5. Таких наборов 3 5 = 15. в) На табло a3.3d.33, где d $\ne $3. Здесь a=0, 1, 2, d=0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, всего 3 9 = 27 наборов. г) a3.33.m3 – 15 наборов. д) a3.33.3n – 27 наборов. Всего 21 + 15 + 27 + 15 + 27 = 105 наборов, каждый из которых горит 1 секунду. Ответ: 105 секунд.

**4** На доске написаны числа от 1 до 10. Разрешается стереть любые два числа x и y, а вместо них записать на доску числа x-1 и y+3. Могли ли через некоторое время на доске оказаться числа 2, 3, …, 9, 10, 2012?

 **Решение**. Предположим, что мы смогли получить на доске числа 2, 3, …, 9,10,2012. Заметим, что после каждой операции сумма чисел, написанных на доске, увеличивается на 2. Изначально она была равна 55. То есть после каждой операции сумма чисел, написанных на доке, будет нечетной. Однако сумма 2+3+…+10+2012=2066 – четна. Противоречие. Ответ: не могли.

**5** За круглым столом сидят 2n (n>5) человек – рыцари и лжецы. Лжецы на любой вопрос дают ложный ответ, рыцари – правдивый. Каждый из них знает, кто рыцарь, а кто лжец. Каждый из них дал ответы на два вопроса: «Кто его сосед слева?», «Кто его сосед справа?». Мудрецу, который знает, что лжецы за столом присутствуют, но их меньше, чем рыцарей, сообщили количество ответов «Рыцарь» и ответов «Лжец», и он точно назвал количество рыцарей. Сколько ответов «Рыцарь» получил мудрец? Ответ объясните

**Решение**. Друг про друга два сидящих рядом рыцаря (Р), как и два сидящих рядом лжеца (Л), дают ответы «Р» и «Р», а сидящие рядом Р и Л – ответы «Л» и «Л». Если число Л меньше n - 1, то в группе подряд сидящих Р можно заменить крайнего Р на Л, и мы получим тот же набор ответов при другом количестве Р. Также можно заменить Л на Р, если рядом окажутся по крайней мере два Л. Итак, Л ровно n – 1 и никакие двое из них не сидят рядом. Тогда размещение за столом имеет вид либо –Р-Л- Р-…-Л-РРР-Л-, либо –Р-Л-Р-…-Л-РР-Л-…-Р-Л-РР-Л-…-Л-. В обоих случаях получаем 4 ответа «Р». Ответ: 4.

**8класс**

**1**.Каждый из трёх приятелей либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Им был задан вопрос: «Есть ли хотя бы один лжец среди двух остальных?» Первый ответил: «Нет», второй ответил: «Да». Что ответил третий?

 **Решение.** Так как первый и второй приятели дали различные ответы, то один из них – лжец, а другой – рыцарь. Кроме того, рыцарь не мог ответить «Нет» на предложенный ему вопрос, так как в этом случае он бы сказал неправду (среди двух оставшихся точно есть лжец). Следовательно, первый – лжец. Он солгал, значит, среди двух оставшихся должен быть лжец, и им может быть только третий приятель. Значит, третий ответил «Нет». Ответ: «Нет».

**2.**Команда из Пети, Васи и одноместного самоката участвует в гонке. Дистанция разделена на участки одинаковой длины, их количество равно 42, вначале каждого – контрольный пункт. Петя пробегает участок за 9 мин, Вася – за 11 мин, а на самокате любой из них проезжает участок за 3 мин. Стартуют они одновременно, а на финише учитывается время того, кто пришел последним. Ребята договорились, что один проезжает первую часть пути на самокате, остаток бегом, а другой – наоборот (самокат можно оставить на любом контрольном пункте). Сколько участков Петя должен проехать на самокате, чтобы команда показала наилучшее время?

 **Решение**. Если Петя проедет 18 участков и пробежит оставшиеся 42 – 18 = 24, он затратит 18·3 + 24·9 = 270 мин. При этом Васе, наоборот, достанется проехать 24 участка, а пробежать 18, на что уйдет 24·3 + 18·11 = 270 мин — то же самое время. Если же Петя проедет меньшее число участков, то его время (и, соответственно, время команды) увеличится. Если Петя проедет большее количество участков, то увеличится время Васи (и время команды). Достаточно обозначить число проезжаемых Петей участков через x и решить уравнение x·3 + (42 – x)·9 = (42 – x)·3 + 11x. Ответ: 18.

**3**.Известно, что a, b, c такие числа, что a + b + c = 0. Доказать, что в этом случае справедливо соотношение ab + ac + bc ≤ 0.

 **Решение**. Ясно, что $0=\left(a+b+c\right)^{2}=a^{2}+b^{2}+c^{2}+2\left(ab+ac+bc\right)$. Поэтому $2\left(ab+ac+bc\right)=-a^{2}-b^{2}-c^{2}\leq 0$.

**4**. В выпуклом четырехугольнике ABCD стороны AB и CD параллельны, а диагонали AC и BD перпендикулярны. Докажите, что AD+BC $\geq $AB+CD

 **Решение.** Впишем четырехугольник ABCD в прямоугольник EFGH со сторонами, параллельными диагоналям (EF ||AC, точка В принадлежит EF и EH ||BD, точка А принадлежит EH) - смотри рисунок. Пусть L - точка пересечения прямых DC и EF, а M - точка на прямой HG такая, что LM ||FG . Тогда ABLC - параллелограмм, следовательно, AB = CL. Так как GM = FL = EB = HD и AH = CG, то ΔAHD = ΔCGM , следовательно, AD = CM. В силу неравенства треугольника BM ≤ BC+CM = BC+AD . Но BM = DL как диагонали прямоугольника BLMD, и DL = DC +CL = DC+AB. Следовательно, AD+BC ≥ DL = DC +CL = DC+AB, что и требовалось доказать.

**5**. Среди целых чисел от 8 до 17 включительно зачеркните как можно меньше чисел так, чтобы произведение оставшихся было точным квадратом. В ответе укажите сумму всех вычеркнутых чисел.

**Решение.** Чтобы произведение было точным квадратом, нужно, чтобы каждый простой множитель входил в него в четной степени. В произведение 8 · 9·...· 17 в нечетной степени входят 2, 7, 11, 13 и 17. Значит, мы обязаны вычеркнуть сомножители 11, 13 и 17. А вот чтобы «убить» лишние простые множители 2 и 7, хватит одного вычеркнутого сомножителя 14. Итого сумма вычеркнутых чисел равна 11 + 13 + 14 + 17 = 55. Ответ: 55.

**9 класс**

**1**. Найдите наименьшее целое число x, удовлетворяющее неравенству $\frac{100}{\left|x\right|}>x^{2}+1$

Ответ. -4.

**Решение**. Если $\left|x\right|\geq 5, $то $\frac{100}{\left|x\right|}\leq \frac{100}{5}=20<26\leq x^{2}+1$. Значит целые числа, удовлетворяющие неравенству таковы, что$0<\left|x\right|\leq 4$. Непосредственной проверкой убеждаемся в правильности ответа $\frac{100}{\left|-4\right|}=25>17=\left(-4\right)^{2}+1$

**2**. Две машины одновременно выехали из одного пункта и едут в одном направлении. Одна машина ехала со скоростью 50 км/час, другая – 40 км/час. Спустя полчаса из того же пункта и в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую машину на полтора часа позже чем вторую машину. Найдите скорость третьей машины.

Ответ. 60 км/час.

**Решение**. За полчаса первая машина проедет 25 км, вторая 20 км. Обозначим x скорость третей машины. Время за которое она догонит первую машину равно $\frac{25}{х-50}$, а вторую $\frac{20}{х-40}$ . Получаем уравнение $\frac{25}{х-50}-\frac{20}{х-40}=\frac{3}{2}$ и из него x = 60 .

**3.** Вася написал на доске несколько натуральных чисел. Петя подписал под каждым Васиным числом его квадрат. После чего Маша сложила все числа, написанные на доске, и получила 111. Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

 **Решение**. Пусть a одно из чисел, написанных Васей. Тогда Петя подписал под ним число $а^{2}$ . Сумма этих двух чисел $а+а^{2}=а\left(а+1\right)$ есть произведение двух последовательных натуральных чисел, то есть четное число. Сумма любого количества четных чисел есть четное число, но 111 – нечетное число. Значит, что кто-то из ребят ошибся.

**4**. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC (AD$>BC)$ угол B – прямой, E – точка пересечения диагоналей, точка F – основание перпендикуляра, опущенного из точки E на сторону AB. Докажите, что углы CFE и DFE равны.

**Решение**. Поскольку EF перпендикулярно AB, достаточно заметить равенство углов BFC и AFD. Из параллельности AD и FE и теоремы Фалеса получаем равенство $\frac{BF}{AF}=\frac{BE}{DE}$. В треугольниках CEB и AED имеет место равенство углов C и A, B и D, как накрест лежащих углов. Это означает, что треугольники CEB и AED подобные и $\frac{BE}{DE}=\frac{BC}{AD} $. Поэтому получаем равенство $\frac{BF}{AF}=\frac{BC}{AD}$ и подобие треугольников BFC и AFD. Тем самым есть равенство углов BFC и AFD.

**5**. На столе лежит куча из 2013 монет. Из нее убирают одну монету и кучу делят на две (не обязательно поровну). Затем из какой-нибудь кучи, содержащей больше одной монеты, снова убирают одну монету и снова кучу делят на две. И так далее. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучи, состоящие из трех монет? Ответ: нет

**Решение.** После каждой процедуры число монет уменьшается на 1, а число кучек на 1 увеличивается. Поскольку первоначально монет было 2013, а кучка одна, то после n процедур монет окажется 2013 − n, а кучек станет n +1. В задаче требуется, чтобы выполнилось равенство: 2013 − n = 3(n + 1) или 2010 = 4n, что невозможно, поскольку правая часть кратна 4, а левая – нет.

**10 класс**

**1** Натуральные числа от 1 до 127 разбили на несколько (больше одной) групп. Оказалось, что во всех группах суммы чисел равны. Доказать, что число групп чётно.

**Решение**. Сумма S всех чисел равна S = 127⋅64. Число 127 – простое, а все делители числа 64, отличные от единицы – чётные. Поскольку во всех группах суммы чисел равны, общее число N групп является делителем числа S, то есть либо N=127, либо N чётно. Но равенство N = 127 означает, что в каждой группе ровно одно число, и поскольку все числа различны, такая ситуация невозможна.

**2.** Рациональные числа x и y таковы, что для них справедливо равенство $х^{3}+у^{3}=2ху$. Доказать, что число 1–xy является квадратом рационального числа.

**Решение**. Если x = 0, то 1 – xy = 1. Пусть x ≠ 0. Преобразуем величину 1 – xy, чтобы выделить комбинацию вида $х^{3}$+$у^{3}$ . Для этого сначала домножим её на $х^{2}$: $х^{2}$(1 – xy) = $х^{2}$ – $х^{3}$y. Вычитая и прибавляя $у^{4}$ , получим $х^{2}$ (1 – xy) = $х^{2}$ – $х^{3}$y – $у^{4}$ + $у^{4}$ = $х^{2}$ – y($х^{3}$+ $у^{3}$ ) + $у^{4}$ = $х^{2}$ – 2x$у^{2}$ + $у^{4}$ = $\left(х-у^{2}\right)^{2}$ . Из полученного равенства имеем $1-ху=\left(\frac{х-у^{2}}{х}\right)^{2}$.

**3** Укажите все точки координатной плоскости xOy, через которые график функции $у=р^{2}+\left(4-2р\right)х-х^{2}$ не проходит ни при одном значении параметра p.

**Решение**. Рассмотрим данное уравнение как уравнение относительно неизвестного p при параметрах x и y. Преобразуя его, получим $у=р^{2}-2рх+х^{2}+4х-2х^{2}$ и $у+2х^{2}-4х=\left(р-х\right)^{2}$ . Это уравнение имеет решения в том и только том случае, когда левая часть неотрицательна, откуда следует ответ. Ответ: все точки, для которых y < 4x – $2х^{2}$.

**4.** Четырёхугольник ABCD вписан в окружность с центром O. Точка P – точка пересечения диагоналей, точки K, L, M и N – соответственно, центры описанных окружностей треугольников AOP, BOP, COP и DOP. Доказать, что KL = MN.

**Решение.** Точки K, L, M и N лежат на серединном перпендикуляре m к отрезку OP. В частности, точка K получается как точка пересечения прямой m с серединным перпендикуляром к отрезку AP, остальные три точки получаются аналогично. Покажем, что середина F отрезка OP является также и серединой отрезка KM. Для этого опустим перпендикуляры K$К\_{1}$, M$М\_{1}$, FG и OH на прямую AC. Точка $К\_{1}$ – середина отрезка AP, $М\_{1}$ – середина PC, G – середина PH, а точка H – середина AC. Получаем $K\_{1}G=K\_{1}P-PG=\frac{1}{2}\left(AP-PH\right)=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}CH=\frac{1}{2}\left(CP+PH\right)=M\_{1}P+PG=M\_{1}G$ . По теореме Фалеса KF = FM. Аналогично, F является и серединой отрезка LN, откуда следует требуемое утверждение.

**5.** В олимпиаде, состоящей из 6 задач, участвуют 200 школьников. Известно, что каждую задачу решили хотя бы 120 школьников. Докажите, что можно выбрать двух школьников таким образом, чтобы каждую задачу решил кто-либо из этой пары.

**Решение**. Всего было написано не менее 120 × 6 = 720 решений задач. В среднем это составляет 720 : 200 = 3,6 решений на одного школьника. Значит, найдётся школьник, решивший не менее четырёх задач. Пусть он не решил задачи A и B. По этим двум задачам имеется 240 решений. В среднем это составляет 240 : 200 = 1,2 решений на одного школьника. Значит, найдётся школьник, решивший эти задачи.

**11 класс**

**1** Так как $\cos(2х)=1-2\left(\sin(х)\right)^{2}$, то cos2x = f (sin x) , где $f\left(х\right)=1-2х^{2}$. Заметив это, одиннадцатиклассник Вася пытается найти функцию g(x), для которой cos3x = g(sin x) при всех значениях х. Удастся ли ему это сделать?

 **Решение**. Если бы оказалось, что cos3x = g(sin x) тождественно, то при х=0 получилось бы 1=g(0), а при x = π получилось бы −1=g(0). Следовательно, такой функции нет. Ответ: Такой функции не существует.

**2.** СК – биссектриса угла С треугольника АВС (точка К лежит на стороне АВ). Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник АВС, находится вне круга, для которого отрезок ВК является диаметром.

**Решение**. О – центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис. Угол ВОК −- внешний для треугольника ВОС, поэтому ϕ=β+γ, где $∠ВОК=φ, γ=\frac{1}{2}∠С, β=\frac{1}{2}∠В.$ Так что $β+γ=\frac{1}{2} \left(∠В+∠С\right)<\frac{1}{2}180°=90°.$ Таким образом, ϕ$<90°.$ Это означает, что точка О лежит вне круга с диаметром ВК. (Напомним, что точки Р, не лежащие на прямой ВК, классифицируются следующим образом: точки, из которых отрезок ВК виден под тупым углом − это в точности точки, лежащие внутри круга с диаметром ВК; точки, из которых отрезок ВК виден под прямым углом, − это точки, лежащие на границе этого круга; точки, из которых отрезок ВК виден под острым углом, − это точки, лежащие вне этого круга).

**3**. Даны 100 чисел $а\_{1},а\_{2},а\_{3},…,а\_{100}$ отличных от нуля. Рассматриваются всевозможные попарные произведения $а\_{i}а\_{j}$ , 1≤ i < j ≤100. i j Докажите, что среди этих произведений более 49% положительных.

**Решение**. Число всевозможных попарных произведений $а\_{i}а\_{j}$, 1≤ i < j ≤100, равно $\frac{100\*99}{2}=4950$ Сколько среди них отрицательных? Пусть k − количество отрицательных чисел среди $а\_{1},а\_{2},а\_{3},…,а\_{100}$, тогда 100 − k − количество положительных чисел среди них. Отрицательное произведение двух чисел получается, только если перемножаются отрицательное и положительное числа. Умножаем каждое отрицательное на каждое положительное. Это даем нам общее количество отрицательных попарных произведений: k(100 − k). Стало быть, общее количество положительных попарных произведений равно 4950 − k(100 − k) . Преобразуем: $4950-k\left(100-k\right)=4950+k^{2}-100k=4950+\left(k-50\right)^{2}-2500=2450+\left(k-50\right)^{2}\geq 2450$ (с равенством при k = 50). Значит, доля положительных произведений среди всех произведений не меньше $\frac{2450}{4950}\*100=49,…\%$ . Замечание. 1) Число положительных произведений можно посчитать иначе, умножая отрицательные числа на отрицательные, а положительные − на положительные. 2) Неверно, что положительные произведения всегда составляют не меньше половины от общего числа.

**4** Для заданного натурального числа a >1 найдите все такие натуральные числа b, для которых число ab −1 делится на число $а^{2}-1$

**Решение.** Пусть число b таково, что ab −1 делится на $a^{2}-1$ . Тогда и a(ab −1) делится на $a^{2}-1$. Таким образом $a^{2}b-a=a^{2}b-b+b-a=\left(a^{2}-1\right)b+\left(b-a\right)$ делится на $a^{2}-1$ . Следовательно, b − a делится на $a^{2}-1$ , т.е. $b-a=\left(a^{2}-1\right)t$, где t − некоторое натуральное число, т.е. $b=\left(a^{2}-1\right)t+a$ . (1) Обратно, если b имеет вид (1) с некоторым (любым) натуральным t, то $ab-1=a\left(a^{2}-1\right)t+a^{2}-1=\left(a^{2}-1\right)\left(at+1\right)$ число, которое делится на $a^{2}-1$ Ответ: $b=\left(a^{2}-1\right)t+a$, где t − произвольное натуральное число.

**5** 125 студентов пришли в большую аудиторию. Каждый из студентов знаком ровно с десятью другими. Некоторые из студентов покинули аудиторию во время перерыва. Затем выяснилось, что все оставшиеся студенты знакомы с одинаковым числом людей, оставшихся в аудитории. Докажите, что среди студентов, которые ушли, были знакомые друг с другом

**Решение**. Первоначально имеем граф с 125 вершинами, причем степень каждой вершины равна 10. Поэтому число всех ребер графа равно $\frac{10\*125}{2}=625$. Предположим, что удалось найти m вершин, никакие две из которых не соединены ребром, и при удалении которых вместе с ребрами, из них выходящими, остается граф с 125 − m вершинами, каждая из которых имеет одну и ту же степень d. В этом новом графе число ребер равно $\frac{\left(125-m\right)d}{2}$, и оно на 10m меньше числа ребер исходного графа (т.к.с каждой удаленной вершиной «исчезают» 10 ребер, выходящих из этой вершины, и все «исчезающие» ребра различны). Таким образом, $625-10m=\frac{d\left(125-m\right)}{2}$ , $125\left(10-d\right)=m\left(20-d\right), $где 0 ≤ d < 10, так как 20 − d ≤ 20, то число 20 − d делится самое большее на первую степень числа 5, поэтому m делится на 25: m = 25μ. Тогда 5(10 − d) = μ(20 − d), μ < 5. Значит, число 20 − d делится на 5, т.е. либо d = 0 , либо d = 5, т.е. либо 50 = 20μ , либо 25 = μ ⋅15, что невозможно при целых значениях μ. Отсюда вытекает утверждение задачи